Ασκήσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης

Δευτέρα 7 Δεκεμβρίου 2015

8^{ο} Μάθημα - Ορθοκανονικά Σύνολα, Θεώρημα Riesz

Άσκηση 1. Έστω H χώρος Hilbert και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορθοκανονική ακολουθία στον H. Να δειχθεί ότι για κάθε $x^* \in H^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^*(e_n) = 0$.

Άσκηση 2. Έστω H, H' χώροι Hilbert, $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq H$, $\{e'_1, \ldots, e'_n\} \subseteq H'$ ορθοκανονικά σύνολα και $(\lambda_i)_{i=1}^n$ πεπερασμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $T : H \to H'$ με

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i\rangle e'_i, \quad \text{για κάθε } x \in H.$$

Να δειχθεί ότι ο T είναι φραγμένος με $\|T\| = \max\{|\lambda_i| : i = 1, \ldots, n\}$.

Άσκηση 3. Έστω E διαχωρίσιμος χώρος εσωτερικού γινομένου και $(e_i)_{i\in I}$ ορθοκανονική οικογένεια. Να δειχθεί ότι το I είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Άσκηση 4. Έστω E χώρος εσωτερικού γινομένου και $(e_i)_{i\in I}$ ορθοκανονική οικογένεια. Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in E$, το σύνολο $K_x = \{i \in I : \langle x, e_i\rangle \neq 0\}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Άσκηση 5. Έστω H χώρος Hilbert και $M \neq \{0\}$ υπόχωρός του. Αν $f : M \to \mathbb{R}$ γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό, να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδική γραμμική και φραγμένη επέκταση του f σε ολόκληρο τον H, δηλ. υπάρχει $\tilde{f} \in H^*$ τέτοιο ώστε $\tilde{f}|_M = f$, και επιπλέον ότι $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.